弱耗散的 Degasperis-Procesi 方程弱解的存在性*

关春霞[1]，冯兆永[2]
（1. 广东工业大学应用数学学院，广东 广州 510006；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘　要：研究弱耗散 Degasperis-Procesi 方程 Cauchy 问题的弱解，当初值在空间 $L^2(\mathbf{R})\cap L^4(\mathbf{R})$ 中时得到了弱解的存在性。

关键词：弱耗散的 Degasperis-Procesi 方程；适定；强解；爆破准则；整体弱解
中图分类号：O157. 1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 - 6579（2014）02 - 0049 - 06

The Existence of the Global Entropy Weak Solutions for a Weakly Dissipative Degasperis-Procesi Equation

GUAN Chunxia[1], *FENG Zhaoyong*[2]
(1. School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence of the global-in-time entropy weak solutions is obtained for the Cauchy problem of the weakly dissipative Degasperis-Procesi equation with the initial value in $L^2(\mathbf{R})\cap L^4(\mathbf{R})$.

Key words: the weak dissipative Degasperis-Procesi equation; well-posedness; blow-up scenario; strong solution; global weak solution

在本文中我们主要研究如下的弱耗散 Degasperis-Procesi 方程

$$u_t - u_{txx} + 4uu_x + \lambda(u - u_{xx}) = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx},\quad t > 0, x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

其中 $\lambda > 0$。当 $t = 0$ 时，u 满足初始条件

$$u(0,x) = u_0(x), x \in \mathbf{R} \tag{2}$$

Degasperis 等[1]通过对水波方程的研究得到了如下的 Degasperis-Procesi 方程

$$u_t - u_{txx} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx},\quad t > 0, x \in \mathbf{R} \tag{3}$$

它具有双 Hamiltonian 结构可积方程并且有无穷多个守恒律和无穷多对尖峰孤立子解[1]，所以引起了很多数学家和物理学家的关注[2-13]。

当初值在 H^s（其中 $s > 3/2$）时，殷朝阳[5-6]分别证明了 Degasperis-Procesi 方程的直线上和周期局部适定性问题，并且得到了爆破机制和爆破结果。Liu 和殷朝阳等[7-8,11]研究了方程（3）的整体强解的存在性，并证明了在初值满足一定的符号条件时整体强解的唯一性。Coclite 等[12]证明了初值在 $L^2(\mathbf{R})\cap L^4(\mathbf{R})$ 中方程（3）弱解的存在性。

耗散的 Degasperis-Procesi 方程具有如下的形式：

$$u_t - u_{txx} + 4uu_x + L(u)(u - u_{xx}) = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}, t > 0, x \in \mathbf{R}$$

其中 $L(u)$ 是耗散项。一般情况下，L 是和物理量有关的拟线性微分算子。在本文中，$L(u) = \lambda$ 且 $\lambda > 0$ 是个常数。

Wu 等[14-15]研究了方程（1）的爆破和解的衰退。方程（1）强解的整体存在性也有结果[13,16]。方程（1）的弱解情况亦有人研究，Guo 等[17]证明

* **收稿日期：**2013 - 09 - 06
基金项目：中国博士后面上基金资助项目（2012M511857）；国家自然科学青年科学基金资助项目（11201494）
作者简介：关春霞（1981 年生），女；**研究方向：**偏微分方程；**通讯作者：**冯兆永；E-mail：fzhaoy@mail.sysu.edu.cn

了如下结果：如果初值 $u_0 \in H^1(\mathbf{R})$，$y_0 = (1-\partial_x^2)u_0 \in \mathscr{M}(\mathbf{R})$，$\mathrm{supp}y_0^- \subset (-\infty, x_0)$ 并且 $\mathrm{supp}y_0^+ \subset (x_0, +\infty)$，那么方程（1）有且仅有一个弱解 $u \in W_{loc}^{1,+\infty}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}) \cap L_{loc}^{+\infty}(\mathbf{R}_+; H^1(\mathbf{R}))$。仔细观察方程可发现，方程（1）的弱解问题不需要那么强的条件，在本文中，我们只需初值 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^4(\mathbf{R})$ 即可证明其分布意义下弱解的存在，当然由于初值正则性的降低且没有符号的限制，我们没有弱解的唯一性。此文所采用的方法是受文［12］的启发，但是本文有些结果更好一些，这是因为方程（1）的守恒律更好的缘故。此外，文［12］的某些结果是本文中当 $\lambda \to 0$ 时的特殊情况。

令 $m = u - u_{xx}$，我们可以把方程（1）改写为

$$m_t + m_x u + 3mu_x + \lambda m = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \quad (4)$$

注意到，如果 $p(x) = \frac{1}{2}e^{-x}, x \in \mathbf{R}$，则 $(1-\partial_x^2)^{-1}f = p * f$，对所有的 $f \in L^2(\mathbf{R})$，这里 $*$ 代表卷积。从而有 $p * m = u$。应用此等式我们可以把方程（4）化成

$$u_t + uu_x + \partial_x\left(p * \left(\frac{3}{2}u^2\right)\right) + \lambda u = 0, t > 0, x \in \mathbf{R} \quad (5)$$

本文的主要结果是证明方程（1）熵弱解的存在性，在给出主要结论之前，我们先给出弱解以及熵弱解的定义。

定义 1 u 称为方程（1）满足 Cauchy 问题（2）的弱解，如果 $u(t,x) \in L^\infty((0,\infty); L^2(\mathbf{R}))$ 并且在 $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ 上的分布意义下（即在（$\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ 中）满足方程（5）和当 $\lambda \to 0$ 时，$u(t,\cdot) \to u_0$。

定义 2 u 称为方程（1）满足 Cauchy 问题（2）的熵弱解，如果 u 是方程（1）满足 Cauchy 问题（2）的弱解，并且对于任意凸的 C^2 熵函数 η：R→R 和对应的熵对 q：R→R，$q'(u) = u\eta'(u)$，在空间（$\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})$ 以下等式成立

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) + \lambda q(u) + \eta'(u)\partial_x\left(p * \left(\frac{3}{2}u^2\right)\right) \leqslant 0 \quad (6)$$

下面给出本文的主要结论：

定理 1 设 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^4(\mathbf{R})$，则 Cauchy 问题（1）－（2）至少存在一个熵弱解，并且 u 满足以下的条件：

（i）$\| u \|_{L^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \| u_0 \|_{L^2(\mathbf{R})}$；

对于任意的 $t > 0$，且有

（ii）$\| u(t,\cdot) \|_{L^2(\mathbf{R})} \leqslant 2\sqrt{2}e^{-\lambda t} \| u_0 \|_{L^2(\mathbf{R})}$；

（iii）$\| u(t,\cdot) \|_{L^4(\mathbf{R})}^4 \leqslant e^{12\| u_0 \|_{L^2(\mathbf{R})}^2 t} \| u_0 \|_{L^4(\mathbf{R})}^4 + 8\| u_0 \|_{L^2(\mathbf{R})}^2 (e^{12\| u_0 \|_{L^2(\mathbf{R})}^2 t} \| u_0 \|_{L^4(\mathbf{R})}^4 - 1)$。

本文结构如下安排：第 1 节我们给出方程（1）的粘性逼近解 u_ε 并得到关于 u_ε 的基础能量估计。第 2 节证明 u_ε 存在强收敛子列，并证明其子列收敛极限即为方程的熵弱解。

1 粘性逼近解的存在性和估计

本节中，我们构建方程（1）的粘性逼近解 $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t,x)$，即 u_ε 为以下方程的解

$$u_t + uu_x + \partial_x\left(p * \left(\frac{3}{2}u^2\right)\right) + \lambda u = \varepsilon u_{xx},$$

$$t > 0, x \in \mathbf{R} \quad (7)$$

满足初始条件

$$u(0,x) = u_{\varepsilon,0}(x), x \in \mathbf{R} \quad (8)$$

这里 $u_{\varepsilon,0}(x) = (\varphi_\varepsilon * u_0)(x) \in H^s(R)$，$s \geqslant 2$，并且

$$\varphi_\varepsilon(x) = \left(\int \varphi(y)\mathrm{d}y\right)^{-1} \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), x \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$$

其中 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R})$，定义如下

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

如果 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^4(\mathbf{R})$，那么对任意的 $p \in [2,4]$，有

$$\| u_{\varepsilon,0} \|_{L^p(\mathbf{R})} \leqslant \| u_0 \|_{L^p(\mathbf{R})}, \forall \varepsilon > 0$$

并且，当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$u_{\varepsilon,0} \to u_0$，在空间 $L^p(\mathbf{R})$ 中

下面给出粘性解 u_ε 的存在性引理。

引理 1 设 $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$，则方程（7）－（8）存在唯一的强解 $u_\varepsilon \in C(\mathbf{R}_+; H^s(\mathbf{R}))$，$s \geqslant 2$。

证明 任意固定的 $T > 0$ 和 $(t,x,u) \in [0,T) \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，记

$$f(t,x,u) = \frac{u^2}{2}, g(t,x,u) = \lambda u, k(t,x,u) = \frac{3}{2}u^2,$$

$$h(t,x,u) = 0, a(t,x,u) = \varepsilon$$

则文［17］中定理 2.3 的所有条件均满足，则根据文［17］中的定理 2.3 的结论，我们知道存在唯一的解 $u_\varepsilon \in C([0,T); H^s(\mathbf{R}))$，$s \geqslant 2$ 为方程（7）－（8）的强解。由 T 的任意性我们得 $u_\varepsilon \in C(\mathbf{R}_+; H^s(\mathbf{R}))$。

接下来，我们给出 u_ε 的一致 $L^2(\mathbf{R})$ 估计，此估计是本文中最基础的能量估计。

引理 2 设 $u_0 \in L^2(\mathbf{R})$，对于任意固定的 $\varepsilon >$

0，则当 $t>0$ 时，以下的估计成立：

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}\leqslant 2\sqrt{2}e^{-\lambda t}\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})};$$

$$\sqrt{\varepsilon}\|\partial_x u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})}\leqslant 2\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

并且有

$$\|u\|_{L^2(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})}\leqslant\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

证明　令 $v_\varepsilon=(4-\partial_x^2)^{-1}u_\varepsilon$，则 $4v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon=u_\varepsilon$，从而有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon(t,x))^2+5(\partial_xv_\varepsilon(t,x))^2+4(v_\varepsilon(t,x))^2)\mathrm{d}x+\\&2\varepsilon\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon(t,x))^2+5(\partial_xv_\varepsilon(t,x))^2+4(v_\varepsilon(t,x))^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\leqslant\\&\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon(0,x))^2+5(\partial_xv_\varepsilon(0,x))^2+4(v_\varepsilon(0,x))^2)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{9}$$

和

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon(t,x))^2+5(\partial_xv_\varepsilon(t,x))^2+4(v_\varepsilon(t,x))^2)\mathrm{d}x\leqslant\\&\mathrm{e}^{-2\lambda t}\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon(0,x))^2+5(\partial_xv_\varepsilon(0,x))^2+4(v_\varepsilon(0,x))^2)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{10}$$

事实上，用 $v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon$ 乘以方程（7）并且在 $\mathbf{R}$ 上关于 x 积分，得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_tu_\varepsilon(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x-\\&\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^2u_\varepsilon(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x=\\&-\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon\partial_xu_\varepsilon(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x-\\&\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x(p*(u_\varepsilon)^2)(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

和文［12］中引理 2.3 的证明类似，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_tu_\varepsilon(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x-\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^2u_\varepsilon(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon)^2+5(\partial_xv_\varepsilon)^2+4(v_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x+\\&\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^3v_\varepsilon)^2+5(\partial_x^2v_\varepsilon)^2+4(\partial_xv_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&-\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon\partial_xu_\varepsilon(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x-\\&\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x(p*(u_\varepsilon)^2)(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x=0\end{aligned}$$

由于 $\lambda>0$，则根据分部积分，可得到

$$\begin{aligned}&\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x=\\&\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(4v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)(v_\varepsilon-\partial_x^2v_\varepsilon)\mathrm{d}x=\\&\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon)^2-5v_\varepsilon\partial_x^2v_\varepsilon+4(v_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x=\\&\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon)^2+5(\partial_xv_\varepsilon)^2+4(v_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x\geqslant 0\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon)^2+5(\partial_xv_\varepsilon)^2+4(v_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x+\\&\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^3v_\varepsilon)^2+5(\partial_x^2v_\varepsilon)^2+4(\partial_xv_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x\leqslant 0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon)^2+5(\partial_xv_\varepsilon)^2+4(v_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x\leqslant\\&-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon)^2+5(\partial_xv_\varepsilon)^2+4(v_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对以上两个不等式在 $[0,t]$ 上积分，就可得到式（9）和式（10）。

通过文［12］中引理 2.2 的证明，我们有

$$\begin{aligned}&\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\leqslant\\&8\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon)^2+5(\partial_xv_\varepsilon)^2+4(v_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x;\\&\|\partial_xu_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\leqslant\\&8\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^3v_\varepsilon)^2+5(\partial_x^2v_\varepsilon)^2+4(\partial_xv_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&\|u_\varepsilon(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\geqslant\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon(0,x))^2+\\&5(\partial_xv_\varepsilon(0,x))^2+4(v_\varepsilon(0,x))^2)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

从而利用式（9）、式（10）可得到

$$\begin{aligned}&\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\leqslant 8\mathrm{e}^{-2\lambda t}\|u_\varepsilon(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\leqslant\\&8\mathrm{e}^{-2\lambda t}\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\end{aligned}\tag{11}$$

和

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|\partial_xu_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})}^2\leqslant 8\varepsilon\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^3v_\varepsilon)^2+\\&5(\partial_x^2v_\varepsilon)^2+4(\partial_xv_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\\&4\int_{-\infty}^{+\infty}((\partial_x^2v_\varepsilon(0,x))^2+5(\partial_xv_\varepsilon(0,x))^2+\\&4(v_\varepsilon(0,x))^2)\mathrm{d}x\leqslant 4\|u_\varepsilon(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\leqslant 4\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\end{aligned}$$

则由式（11），有

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})}^2=\int_0^{+\infty}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{4}{\lambda}\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2$$

此引理得证。

为了书写方便我们记 $P_\varepsilon=\frac{3}{2}p*(u_\varepsilon)^2$，则 $P_\varepsilon\geqslant 0$。根据引理 2 中的 L^2 一致估计结果，用 Hölder 不等式，可以得到如下估计：

$$\|P_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1(\mathrm{R})} \leqslant \frac{3}{2}\|p\|_{L^1(\mathrm{R})}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \leqslant 12\mathrm{e}^{-2\lambda t}\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \tag{12}$$

$$\|\partial_x P_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1(\mathrm{R})} \leqslant \frac{3}{2}\|\partial_x p\|_{L^1(\mathrm{R})}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \leqslant 12e^{-2\lambda t}\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \tag{13}$$

这里用到了 $\|p\|_{L^1(\mathrm{R})}=1$ 和 $\|\partial_x p\|_{L^1(\mathrm{R})}=1$。再次应用 Hölder 不等式和引理 2，还可以得到

$$\|P_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathrm{R}_+\times\mathrm{R})} \leqslant \frac{3}{2}\|p\|_{L^\infty(\mathrm{R})};$$
$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^\infty(\mathrm{R}_+;L^2(\mathrm{R}))} \leqslant 6\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \tag{14}$$

以及

$$\|\partial_x P_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathrm{R}_+\times\mathrm{R})} \leqslant \frac{3}{2}\|\partial_x p\|_{L^\infty(\mathrm{R})};$$
$$\|u_\varepsilon\|^2_{L^\infty(\mathrm{R}_+;L^2(\mathrm{R}))} \leqslant 6\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \tag{15}$$

其中用到了 $\|p\|_{L^\infty(\mathrm{R})}=\frac{1}{2}$ 和 $\|\partial_x p\|_{L^\infty(\mathrm{R})}=\frac{1}{2}$。

由恒等式 $(1-\partial_x^2)^{-1}f=p*f$，对所有的 $f\in L^2(\mathbf{R})$ 成立，利用引理 2 和估计式（12），推出

$$\|\partial_x^2 P_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1(\mathrm{R})} \leqslant \|P_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^1(\mathrm{R})} + \frac{3}{2}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \leqslant 24\mathrm{e}^{-2\lambda t}\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \tag{16}$$

接下来，我们证明粘性逼近解在 L^4 中一致有界。

引理 3 设 $u_0\in L^2(\mathbf{R})\cap L^4(\mathbf{R})$，对于任意固定的 $\varepsilon>0$，则当 $t>0$ 时，有

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})} \leqslant \mathrm{e}^{12\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}t}\|u_0\|^4_{L^4(\mathrm{R})} + 8\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}(\mathrm{e}^{12\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}t}\|u_0\|^4_{L^4(\mathrm{R})}-1)$$

证明 对方程（7）乘以 $4u_\varepsilon^3$ 关于 x 在 R 上积分，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})} = -6\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon^3(\partial_x p*(u_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x - 4\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon^4\mathrm{d}x + 4\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon^3\partial_{xx}u_\varepsilon\mathrm{d}x$$

利用 Hölder 不等式以及式（11）、式（15），可推出

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon^3(\partial_x p*(u_\varepsilon)^2)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|\partial_x p*(u_\varepsilon)^2\|_{L^\infty(\mathrm{R}_+\times\mathrm{R})}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^3_{L^3(\mathrm{R})} \leqslant$$
$$4\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2(\mathrm{R})}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^4(\mathrm{R})} \leqslant$$
$$2\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}(\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathrm{R})} + \|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})}) \leqslant$$
$$16\|u_0\|^4_{L^2(\mathrm{R})} + 2\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})}$$

利用分部积分，得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon^3\partial_{xx}u_\varepsilon\mathrm{d}x = -3\int_{-\infty}^{+\infty}u_\varepsilon^2(\partial_x u_\varepsilon)^2\mathrm{d}x \leqslant 0$$

又因为 $\lambda>0$，则可得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})} \leqslant 96\|u_0\|^4_{L^2(\mathrm{R})} + 12\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})}$$

此不等式可以改写为如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})} + 8\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}) \leqslant 12\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}(\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})} + 8\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})})$$

则由 Gronwall's 不等式，即可得到

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|^4_{L^4(\mathrm{R})} + 8\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})} \leqslant \mathrm{e}^{12\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})}t}(\|u_0\|^4_{L^4(\mathrm{R})} + 8\|u_0\|^2_{L^2(\mathrm{R})})$$

此不等式经过一个简单的移项即可得到此引理的结论。

注 1 文［12］中对应的结果是本文中引理 2 中当 $\lambda\to 0$ 时的特殊情况。

2 熵弱解的存在性

以第 1 节中的估计为基础，在本节中我们首先给出粘性解的一致先验估计，然后证明其强收敛性，最后证明粘性逼近解的极限即为方程（1）的弱解。

为了证明我们的结果，首先给出两个引理。

引理 4[18] 设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$，$(N\geqslant 2)$ 中的有界开集，$\{\mathscr{L}_n\}_{n=1}^\infty$ 在空间 $W^{-1,\infty}(\Omega)$ 中有界，并且

$$\mathscr{L}n = \mathscr{L}_\mathrm{n}^1 + \mathscr{L}_\mathrm{n}^2$$

其中 $\{\mathscr{L}_n^1\}_{n=1}^\infty$ 是 $H^{-1}_{loc}(\Omega)$ 中的紧子集，$\{\mathscr{L}_n^2\}_{n=1}^\infty$ 在 $\mathscr{M}_{loc}(\Omega)$ 中有界。那么 $\{\mathscr{L}_n\}_{\mathrm{n}=1}^\infty$ 在 $H^{-1}_{loc}(\Omega)$ 中紧。

引理 5[19] 设 Ω 是 $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$ 中的有界开集。对某个 $s\geqslant 0$，$f\in C^2(\mathbf{R})$ 满足：

$$|f(x)|\leqslant C|x|^{s+1},\ |f'(x)|\leqslant C|x|^s,\ x\in\mathbf{R};$$
$$\mathrm{meas}\{x: f''(x)=0\}=0$$

定义 $I_l, f_l, F_l:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足如下条件：

$I_l\in C^2(\mathbf{R})$，$|I_l(x)|\leqslant u$，$|I'_l(x)|\leqslant 2$，对所有的 $x\in\mathbf{R}$；

$$\begin{cases} I_l(x)=x, & |x|\leqslant l; \\ I_l(x)=0, & |x|\geqslant 2l; \end{cases}$$

$$f_l(u) = \int_0^u I'_l(x)f'(x)\mathrm{d}x,$$

$$F_l(u) = \int_0^u f'_l(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

设对某个固定的 $l>0$，$\{u_n\}_{n=1}^\infty\subset L^{2(s+1)}(\Omega)$ 使得下面两个序列

$$\{\partial_t I_l(u_n)+\partial_x f_l(u_n)\}_{n=1}^\infty,\ \{\partial_t f_l(u_n)+\partial_x F_l(u_n)\}_{n=1}^\infty,$$

均是 $H^{-1}_{loc}(\Omega)$ 中的紧子集。则存在 $1\leqslant r<2(s+1)$ 和 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 的一个子序列在空间 $L^r(\Omega)$ 中强收敛到

一个函数 $u \in L^{2(s+1)}(\Omega)$。

现在给出本节的一个主要结果。

引理 6　设 $u_0 \in L^2(\mathbf{R}) \cap L^4(\mathbf{R})$，则存在 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的一个子列 $\{u_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和一个函数 u，使得对任意的 $T>0$，有

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}_+;L^2(\mathbf{R})) \cap L^\infty(0,T;L^4(\mathbf{R})) \tag{17}$$

并且当 $k\to\infty$ 时，有

$$u_{\varepsilon_k} \to u, \text{在空间 } L^p((0,T)\times\mathbf{R}) \text{ 中}, \forall p \in [2,4) \tag{18}$$

证明　设 $\eta:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个具有紧支集的 C^2 熵函数，$q:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 对应的熵对，满足 $q'(u)=u\eta'(u)$。我们说存在 $\mathscr{L}_\varepsilon^1,\mathscr{L}_\varepsilon^2$，使得

$$\partial_t\eta(u_\varepsilon) + \partial_x q(u_\varepsilon) = \mathscr{L}_\varepsilon^1 + \mathscr{L}_\varepsilon^2 \tag{19}$$

这里 $\mathscr{L}_\varepsilon^1,\mathscr{L}_\varepsilon^2$ 满足：对任意的 $\Omega\subset\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$ 有界，

$\mathscr{L}_\varepsilon^1\to 0$，在空间 $H^{-1}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 中；

$\mathscr{L}_\varepsilon^2$ 在空间 $\mathscr{M}(\Omega)$ 中一致有界

事实上，在方程（7）两边同时乘以 $\eta'(u)$，根据链式法则可得

$$\partial_t\eta(u_\varepsilon) + \partial_x q(u_\varepsilon) + \eta'(u_\varepsilon)\partial_x P_\varepsilon + \lambda q'(u_\varepsilon) = \varepsilon(\partial_x^2\eta(u_\varepsilon) - \eta''(u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon)^2) \tag{20}$$

令 $\mathscr{L}_\varepsilon^1 = \varepsilon、\partial_x^2\eta(u_\varepsilon)$，$\mathscr{L}_\varepsilon^2 = -\lambda q'(u_\varepsilon) - \eta'(u_\varepsilon)\partial_x P_\varepsilon - \varepsilon\eta''(u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon)^2$，则我们有式（19），下面我们只需要证明 $\mathscr{L}_\varepsilon^1,\mathscr{L}_\varepsilon^2$ 满足上述条件即可。

根据引理 2，可得到

$$\|\varepsilon\partial_x\eta(u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})} \leqslant \sqrt{\varepsilon}\|\eta'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\sqrt{\varepsilon}\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})} \leqslant 2\sqrt{\varepsilon}\|\eta'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

所以，在空间 $H^{-1}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 中，$\mathscr{L}_\varepsilon^1\to 0$。对任意的 $\Omega=[0,T]\times[a,b]\subset\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$，应用引理 2 和 Hölder 不等式，则有

$$\|q'(u_\varepsilon)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u_\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|\eta'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}|\Omega|^{1/2}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leqslant 2\sqrt{2(b-a)T}\|\eta'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

再次根据引理 2 以及式（13），得

$$\|\eta'(u_\varepsilon)\partial_x P_\varepsilon\|_{L^1((0,T)\times\mathbf{R})} \leqslant 12T\|\eta'\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}$$

和

$$\|\varepsilon\eta''(u_\varepsilon)(\partial_x u_\varepsilon)^2\|_{L^1(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})} \leqslant 4\|\eta''\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2$$

因此，对任意的 $\Omega\subset\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}$ 有界，$\mathscr{L}_\varepsilon^2$ 在空间 $\mathscr{M}(\Omega)$ 中一致有界。根据引理 4，$\partial_t\eta(u_\varepsilon)+\partial_x q(u_\varepsilon)$ 在 $H_{loc}^{-1}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 中紧。

在引理 5 中，令 $f(u)=\frac{1}{2}u^2$，则 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\subset L_{loc}^2(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 且 $f'_l(u)=uI'_l(u)$，$F'_l(u)=uf'_l(u)$。由以上的讨论，我们知道，对每个固定的 $l>0$，以下的两个序列

$$\{\partial_t I_l(u_\varepsilon)+\partial_x f_l(u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}, \{\partial_t f_l(u_\varepsilon)+\partial_x F_l(u_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$$

是 $H_{loc}^{-1}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 中的紧子集。因此，由引理 5 可知，存在 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 的一个子列 $\{u_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和一个函数 u 满足式（17），并且当 $k\to\infty$ 时，有

$$u_{\varepsilon_k}\to u, \text{在空间 } L^p((0,T)\times\mathbf{R}) \text{ 中}, \forall p\in[2,4)$$

此引理得证。

由引理 6，我们就可以来证明定理 1 了。

证明　对任意的 $T>0$，由（18）可知，当 $k\to\infty$ 时，对任意的 $(q,p)\in[2,4)\times[1,2)$，$(u_{\varepsilon_k}, u_{\varepsilon_k}^2)\to(u,u^2)$ 在空间

$$L^q((0,T)\times\mathbf{R})\times L^p((0,T)\times\mathbf{R}) \tag{21}$$

所以在空间（$\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 中，有 $u_{\varepsilon_k}\to u$，$u_{\varepsilon_k}^2\to u^2$，根据广义函数导数的定义，就可得到，当 $k\to\infty$ 时，在空间（$\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 中，有

$$\partial_t u_{\varepsilon_k}\to\partial_t u, u_{\varepsilon_k}\partial_x u_{\varepsilon_k} = \frac{1}{2}\partial_x(u_{\varepsilon_k}^2)\to \frac{1}{2}\partial_x(u^2) = u\partial_x u, \lambda u_{\varepsilon_k}\to\lambda u$$

从而要证明 u 是方程的弱解，由方程的形式知，只需证明：当 $k\to\infty$ 时，在空间（$\mathscr{D}'(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 中，有

$$\partial_x p * u_{\varepsilon_k}^2 \to \partial_x p * u^2$$

也即只需证

$$p * u_{\varepsilon_k}^2 \to p * u^2 \tag{22}$$

事实上，由式（21）和 Hölder 不等式，知当 $k\to\infty$ 时，有

$$\|p*u_{\varepsilon_k}^2 - p*u^2\|_{L^p((0,T)\times\mathbf{R})}^p = \|p*(u_{\varepsilon_k}^2-u^2)\|_{L^p((0,T)\times\mathbf{R})}^p \leqslant \|p\|_{L^1(\mathbf{R})}^p\|u_{\varepsilon_k}^2-u^2\|_{L^p((0,T)\times\mathbf{R})}^p \leqslant \|u_{\varepsilon_k}^2-u^2\|_{L^p((0,T)\times\mathbf{R})}^p \to 0$$

这里用到了 $\|p\|_{L^1(\mathbf{R})}^p = 1$。所以式（22）成立。

接下来我们证明 u 不仅是方程的弱解而且是方程的熵弱解（i. e. u 满足（6））。对任意的 $\eta:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个具有紧支集的 C^2 凸函数，$q:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 对应的熵对，满足 $q'(u)=u\eta'(u)$。如果在方程（20）中选择 $\varepsilon=\varepsilon_k$，令 $k\to\infty$，因为，在空间 $H_{loc}^{-1}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R})$ 中，$\varepsilon_k\partial_x^2\eta(u_{\varepsilon_k})\to 0$，并且 $\varepsilon>0$，$\eta''>0$，所以 u 满足（6）。

根据引理 5－6，我们知道 u 满足定理 1 中的条件（i）－（iii）。因此本文结论成立。

参考文献：

[1] DEGASPERIS A, HOLM D D, HONE A N W. A new integral equation with peakon solutions [J]. Theo Math Phys, 2002, 133: 1463 – 1474.

[2] HOLM D D, STALEY M F. Wave structure and nonlinear balances in a family of evolutionary PDEs [J]. SIAM J Appl Dyn Syst, (electronic), 2003, 2: 323 – 380.

[3] LENELLS J. Traveling wave solutions of the Degasperis-Procesi equation [J]. J Math Anal Appl, 2005, 306: 72 – 82.

[4] LUNDMARK H. Formation and dynamics of shock waves in the Degasperis-Procesi equation [J]. Inverse Problems, 2003, 19: 1241 – 1245.

[5] YIN Z. On the Cauchy problem for an integrable equation with peakon solutions [J]. Illinois J Math, 2003, 47 (3): 649 – 666.

[6] YIN Z. Global existence for a new periodic integrable equation [J]. J Math Anal Appl, 2003, 49: 129 – 139.

[7] YIN Z. Global weak solutions to a new periodic integrable equation with peakon solutions [J]. J Funct Anal, 2004, 212: 182 – 194.

[8] YIN Z. Global solutions to a new integrable equation with peakons [J]. Indiana Univ Math J, 2004, 53: 1189 – 1210.

[9] COCLITE G M, KARLSEN K H, HOLDEN H. Well-posedness for a parabolic-elliptic system [J]. Discrete Contin Dyn Systems, 2005, 13: 659 – 682.

[10] MATSUNO Y. Multisoliton solutions of the Degasperis-Procesi equation and their peakon limit [J]. Inverse Problems, 2005, 21: 1553 – 1570.

[11] LIU Y, YIN Z. Global existence and blow-up phenomena for the Degasperis-Procesi equation [J]. Commun Math Phys, 2006, 267: 801 – 820.

[12] COCLITE G M, KARLSEN K H. On the well-posedness of the Degasperis-Procesi equation [J]. J Funct Anal, 2006, 233: 60 – 91.

[13] HENRY D. Infinite propagation speed for the Degasperis-Procesi equation [J]. J Math Anal Appl, 2005, 311: 755 – 759.

[14] WU S, YIN Z. Blow-up and decay of the solution of the weakly dissipative Degasperis-Procesi equation [J]. SIAM J Math Anal, 2008, 40: 475 – 490.

[15] WU S, YIN Z. Blow-up phenomena and decay for the periodic Degasperis-Procesi equation with weak dissipation [J]. J Nonlinear Math Phys, 2008, 15: 28 – 49.

[16] GUO Z. Some properties of solutions to the weakly dissipative Degasperis-Procesi equation [J]. J Differential Equations, 2009, 246(11): 4332 – 4344.

[17] GUO Y, LAI S, WANG Y. Global weak solutions to the weakly dissipative Degasperis-Procesi equation [J]. Nonlinear Analysis: TMA, 2011, 74 (15): 4961 – 4973.

[18] SCHONBEK M. Convergence of solution to nonlinear dispersive equations [J]. Communications in Partial Differential Equations, 1982, 7: 959 – 1000.

[19] LU Y. Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations without convexity conditions [J]. Applicable Analysis: An International Journal, 1989, 31: 239 – 246.